Hipotézis vizsgálatok

Hipotézisvizsgálat

- **Hipotézis:** az alapsokaság paramétereire vagy az alapsokaság eloszlására vonatkozó feltevés.
- **Hipotézis ellenőrzés:** az a statisztikai módszer, amelynek segítségével egy véletlen minta alapján eldöntjük, hogy az adott hipotézis elfogadható-e vagy sem.

Neyman-Pearson lemma:

Meg kell határozni az alábbi hipotéziseket a vizsgálat indítása előtt:

H_0: Null-hipotézis
H_1: Alternatív hipotézis

Döntési táblázat

	Valóshelyzet: H_0 igaz	Valóshelyzet: H_0 hamis
H_0 elfogadása	Helyes döntés $(1-\alpha)$	Másodfajú hiba (β hiba)
H_0 elutasítása	Elsőfajú hiba (α hiba)	Helyes döntés (Power = $1-\beta$)

Elkövethető hibafajták

- **Type I error (α hiba vagy szignifikancia érték):** annak valószínűsége, hogy elutasítjuk a valós H_0 hipotézist.
- Fontos, hogy az elsőfajta hiba kellően alacsony maradjon (felső határaként legtöbbször 5%-ot írnak elő, ezt fejezi ki a $p<0{,}05$ jelzés). Ez az ún. szignifikanciaszint.
- **Type II error (β hiba):** a hibás H_0 hipotézis elfogadásának valószínűsége.
- **Power:** a téves H_0 elutasításának valószínűsége. **Power = 1 - β.**

A statisztikai próba

- A munka-hipotézisek (H_0) nem igazolhatók közvetlen úton.
- Az olyan eljárást, amelyik a minták alapján dönt, *statisztikai próbának* nevezzük.
- Próbafüggvény előállítása.

Próbák

- **Kétoldali próba:** két oldalról állít alsó és felső korlátot (a feltételtől való eltérés tényét vizsgáljuk, irányát nem).
- **Egyoldali próba:** csak az egyik irányban állít korlátot (csak ilyen irányú eltérés lehetséges vagy fontos számunkra).

Átlagra vonatkozó hipotézisek

- **Kétoldalú próbák:**

$$H_0: \overline{x_1} = \overline{x_2}$$
$$H_1: \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$$

Egyoldalú próbák

Baloldali:

$$H_0: \overline{x_1} \geq \overline{x_2}$$
$$H_1: \overline{x_1} < \overline{x_2}$$

Jobboldali:

$$H_0: \overline{x_1} \leq \overline{x_2}$$
$$H_1: \overline{x_1} > \overline{x_2}$$

p-érték (empirikus szignifikancia-szint)

- Az a legkisebb valószínűség, amely mellett a vizsgált H_0 hipotézist elutasíthatjuk a H_1 hipotézissel szemben, azaz, ahol éppen az elfogadásból az elutasításba váltunk.
- A gépi output-ok ezt adják meg.
- Neyman-Pearson lemma/Fisheri döntés a p értéke alapján:

$p < \alpha$: elfogadjuk H_1-t (H_0-t elvetjük).

$p \geq \alpha$: elfogadjuk H_0-t (H_1-t elvetjük).

A hipotézis vizsgálat menete

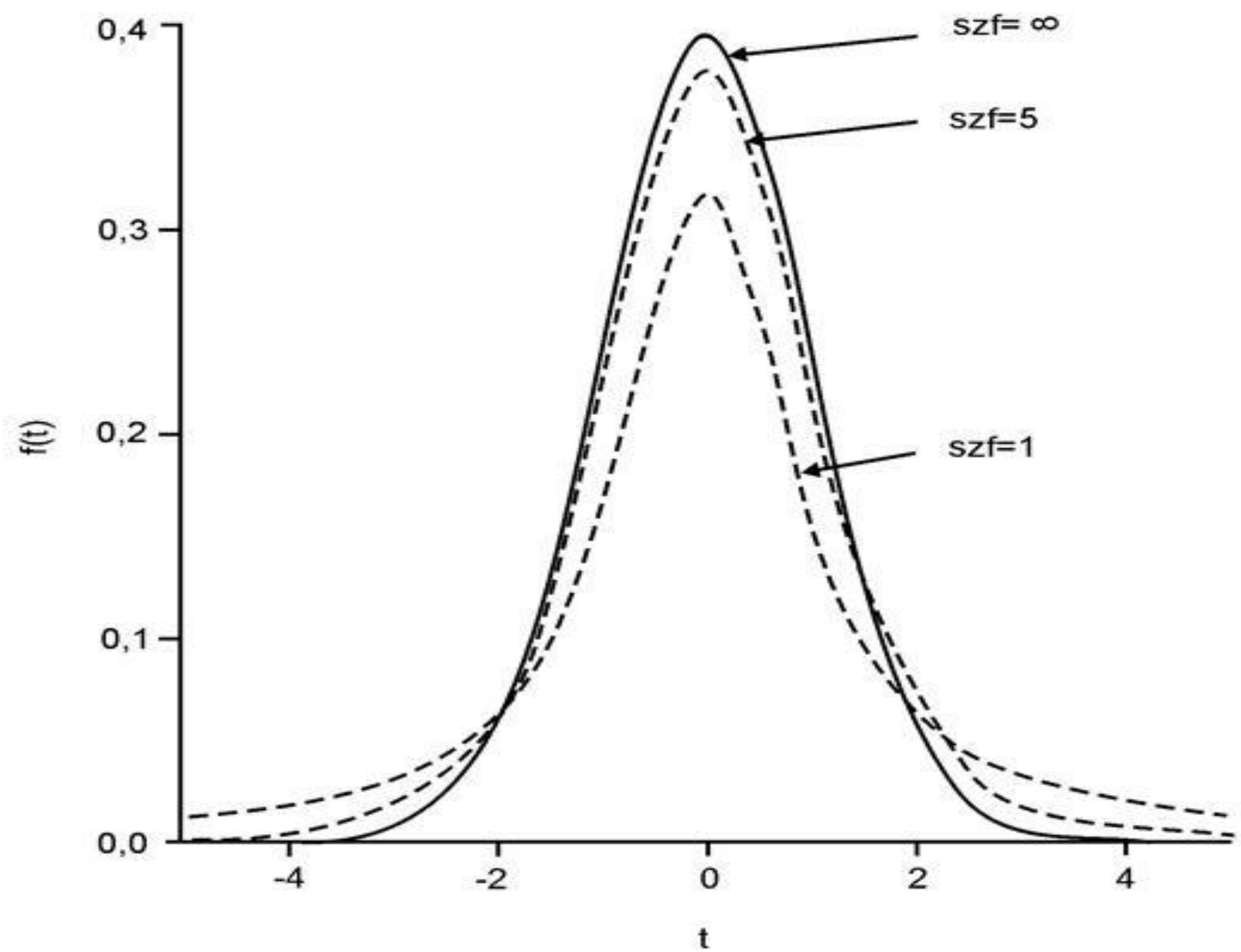
- A null- és alternatív hipotézis megfogalmazása.
- Próbafüggvény keresése/szerkesztése.
- Előre rögzített szignifikanciaszint mellett az elfogadási és elutasítási tartomány megszerkesztése.
- A próbafüggvény empirikus értékének meghatározása.
- Döntés.
- Hasznosítás.

Statisztikai tesztek osztályozása

Paraméteres eljárások	Nem paraméteres eljárások
F – próba	
Egymintás t–próba	Előjel–próba Wilcoxon–próba (egymintás)
Kétmintás t–próba	Mann–Whitney U–próba
Egyszempontos analízis (ANOVA)	Friedmann–próba
Többszempontos analízis (ANOVA)	Kruskal–Wallis–próba

t-tesztek

t-distribution



IV. táblázat. A *t*-(Student-) próba kritikus értékei 80% -os (90%-os), 90% -os (95% -os), 95% -os (97.5% -os), 98% -os (99% -os), 99% -os (99.5% -os), 99.9% -os (99.95% -os) kétoldali (egyoldali) szintre

szabadsági fok, f	Statisztikai biztonság					
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.4370
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.3178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.9651
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.8495
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.8193
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.7251
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.7066
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.6594
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.6460
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.5510
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.4960
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.4602
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.4163
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.3905
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.3398
500	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857	3.3101
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.2905

Normális eloszlást feltételezve, az átlagok összehasonlítására használható próbák

- Egy minta esete: **egymintás *t*-próba**
- Két minta esete:
  - Összetartozó minták: (előtt-után, baloldal-jobboldal):

    páros *t*-próba= egymintás t-próba a különbségekre.
  - Független minták (placebo-kezelés, férfi-nő, beteg-egészséges): **kétmintás *t*-próba**
    - Azonos szórások esetén: klasszikus-módszer.
    - Különböző szórások esetén: módosított-eljárás (pl. Welch vagy d-próba).
    - Szórások egyezésének tesztelése: *F*-próba, Levene-próba.
- >2 minta esetén:

  varianciaanalízis (ANOVA).

Egymintás t-teszt

- Tesztelhetjük, hogy a valószínűségi változónk értéke megegyezik-e egy konkrét értékkel.

$$H_0 : \overline{x} = C$$

- Feltétel:
  - Normális eloszlású populáció.
  - *N > 6-8*.

- Próba-statisztika: (df = *n-1*):

$$t = \frac{\overline{X} - C}{s / \sqrt{n}}$$

Párosított *t*-próba

- Önkontrollos kísérlet, vagy
- Más módon összetartozó adatok:
  - Illesztett párok- matched pairs (különböző személyek, de a kísérlet szempontjából párba állíthatók).
- Nullhipotézis: a két minta-átlag ugyanannak a populáció-átlagnak a közelítése, (nincs kezelés-hatás, a tapasztalt különbség véletlen).
- Alternatív hipotézis: a két minta-átlag két különböző populáció-átlagnak a közelítése (van hatás).
- Döntési szabály:
  - Konfidenica intervallum a különbségre.
  - *t*-érték számítás és összehasonítás a táblázattal.
  - *p*-érték.

Probléma

Subject	Before treatment (Diastoles, mmHg))	After treatment (Diastoles, mmHg))
1	68	66
2	83	80
3	72	67
4	75	74
5	79	70
6	71	77
7	65	64
8	76	70
9	78	76
10	68	66
11	85	81
12	74	68

Párosított t-próba

- Két összefüggő minta középértékének összehasonlítására szolgál.
- H_0: $d_{átlag} = 0$ vagy $H_0 : \overline{x}_1 = \overline{x}_2$
- Feltétel:
  - Normális eloszlású populáció.
  - Egy egyénen kétszer mérünk.
  - Az egyének adatai függetlenek egymástól.
  - $N > 6\text{-}8$.
- Próbastatisztika: (df = $n - 1$)

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

- s_d a párosított minták különbségének szórása, becslése a minta alapján.

Megoldás

t-Test: Paired Two Sample for Means

	Variable 1	*Variable 2*
Mean	74.5	71.58333333
Variance	37.36364	33.90151515
Observations	12	12
Pearson Correlation	0.808438	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	11	
t Stat	2.727754	
P(T<=t) one-tail	0.009829	
t Critical one-tail	1.795885	
P(T<=t) two-tail	0.019657	
t Critical two-tail	2.200985	

Probléma

Comparison height for two samples of Thersites bipartita			
		Height(mm) of shells in sample A +/- 1mm	Height(mm) of shells in sample B +/- 1 mm
		32	38
		31	43
		27	34
		34	40
		37	44
		38	45
		36	39
		22	46
		34	48
		23	39
	Mean	31.4	41.6
	SD	5.7	4.3
	t-TEST	0.0003	

Kétmintás *t*-próba

- Két független minta összehasonlítása
- Feltételek:
  - a minták függetlenek,
  - normális eloszlású populációból származnak,
  - varianciák homogének a csoportok között.
- H_0: $\mu_1=\mu_2$, H_1: $\mu_1\neq\mu_2$
- Próbastatisztika
  - Azonos varianciák esetén:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p}\cdot\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \qquad s_p^2=\frac{(n-1)\cdot s_x^2+(m-1)\cdot s_y^2}{n+m-2}$$

  - Szabadságfok: n+m-2
  - Döntés:

Ha $|t|>t_{\alpha,\text{szab.fok}}$, a különbség szignifikáns α szinten, H_0-t elvetjük

Kétmintás *t*-próba

Próbastatisztika (Welch-próba vagy d-próba):

– Különböző varianciák esetén:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

$$szabadságfok = \frac{(n-1)\cdot(m-1)}{g^2 \cdot (m-1) + (1-g^2)\cdot(n-1)}$$

$$g = \frac{\frac{s_x^2}{n}}{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}$$

A varianciák összehasonlítása

- H_0: $\sigma^2{}_1=\sigma^2{}_2$
- H_1: $\sigma^2{}_1 > \sigma^2{}_2$ vagy $\sigma^2{}_1 > \sigma^2{}_2$ (egyoldalú próba)
- A próbastatisztika (F): a nagyobbik standard deviáció négyzetét osztjuk a kisebbel:

$$F = \frac{\max(s_x^2, s_y^2)}{\min(s_x^2, s_y^2)}$$

- Szabadságfokok:
  - nagyobb SD-hez tartozó minta elemszáma-1
  - Kisebb SD-hez tartozó minta elemszáma-1
- Döntés: F táblázat alapján
  - Ha $F>F_{\alpha,\text{táblázat}}$, a két variancia szignifikánsan különbözik α szinten

F-test

F-Test Two-Sample for Variances

	Variable 1	*Variable 2*
Mean	31.4	41.6
Variance	32.04444444	18.48888889
Observations	10	10
df	9	9
F	1.733173077	
P(F<=f) one-tail	0.212565889	
F Critical one-tail	3.178893105	

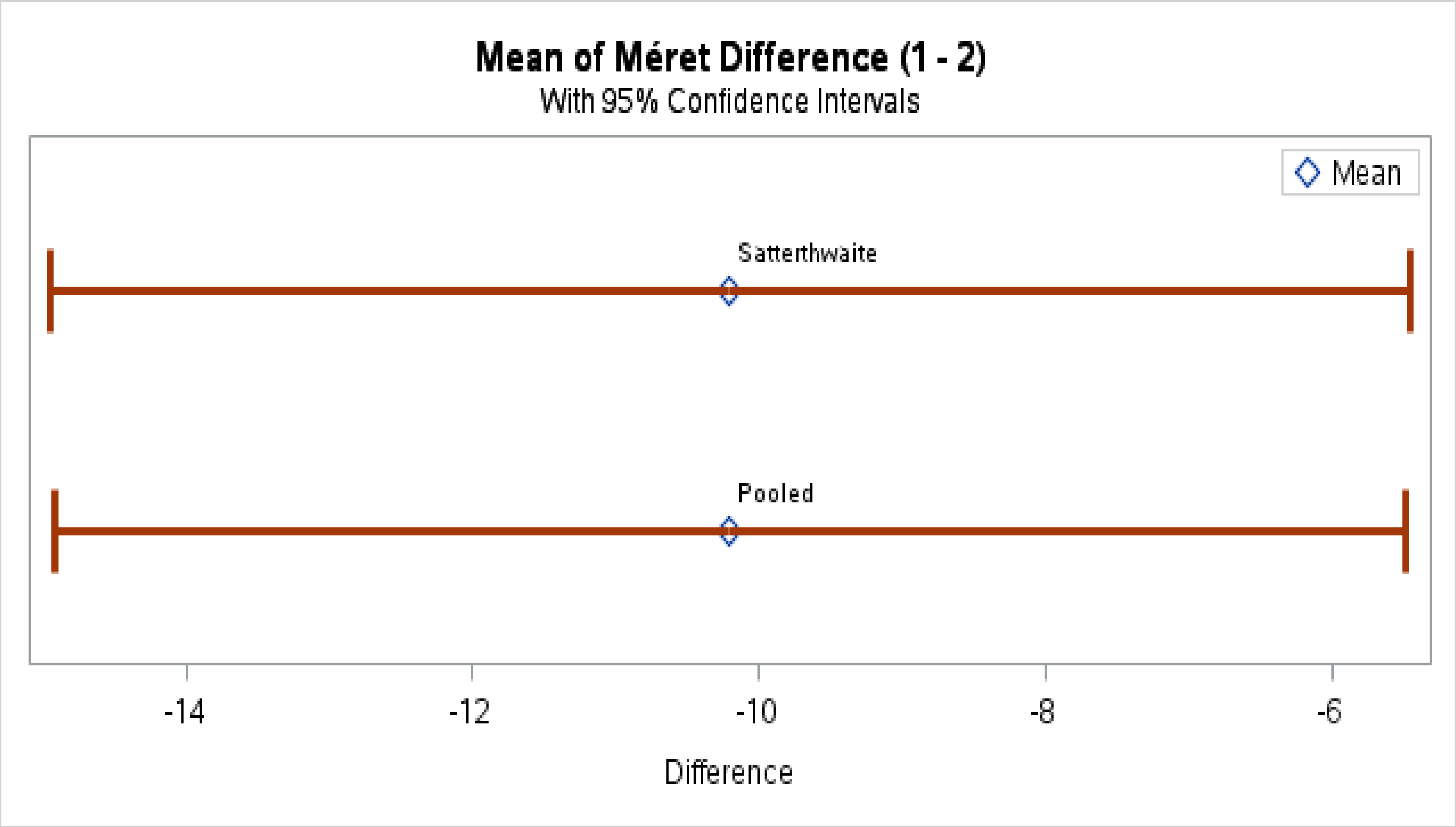
Az F-eloszlás táblázata (részlet)
α=0.05

számláló-> nevező↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4476	199.5	215.7073	224.5832	230.1619	233.986	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817
2	18.51282	19	19.16429	19.24679	19.29641	19.32953	19.35322	19.37099	19.38483	19.3959
3	10.12796	9.552094	9.276628	9.117182	9.013455	8.940645	8.886743	8.845238	8.8123	8.785525
4	7.708647	6.944272	6.591382	6.388233	6.256057	6.163132	6.094211	6.041044	5.998779	5.964371
5	6.607891	5.786135	5.409451	5.192168	5.050329	4.950288	4.875872	4.81832	4.772466	4.735063
6	5.987378	5.143253	4.757063	4.533677	4.387374	4.283866	4.206658	4.146804	4.099016	4.059963
7	5.591448	4.737414	4.346831	4.120312	3.971523	3.865969	3.787044	3.725725	3.676675	3.636523
8	5.317655	4.45897	4.066181	3.837853	3.687499	3.58058	3.500464	3.438101	3.38813	3.347163
9	5.117355	4.256495	3.862548	3.633089	3.481659	3.373754	3.292746	3.229583	3.178893	3.13728
10	4.964603	4.102821	3.708265	3.47805	3.325835	3.217175	3.135465	3.071658	3.020383	2.978237

t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances

	Variable 1	*Variable 2*
Mean	31.4	41.6
Variance	32.04444444	18.48888889
Observations	10	10
Pooled Variance	25.26666667	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	18	
t Stat	-4.537443168	
P(T<=t) one-tail	0.000127527	
t Critical one-tail	1.734063592	
P(T<=t) two-tail	0.000255055	
t Critical two-tail	2.100922037	

A két átlag különbségének CI tartománya



u-próbák

- A matematikai statisztikában több ***u*-próbát** is ismerünk. Szűkebb értelemben ezek *az*

  \- egymintás *u*-próba és a

  \- kétmintás *u*-próba.

- Mindkét próba a paraméteres próbák özé tartozik. A két próba nagyon hasonló matematikai háttérrel rendelkezik, alkalmazási feltételeikben és nullhipotéziseikben is nagyon sok hasonlóság van.
- *Tágabb értelemben* a matematikai statisztikában általában is szoktak *u*-próbaként, vagy *u*-próbákként utalni *minden* olyan próbára, melyben a próbastatisztika standard normális eloszlást követ.
- A fenti két próba rokonítható rendre az egy és a kétmintás t-próbához, mivel páronként ugyanazt a H_0 vizsgálják ugyanolyan adottságok mellett.